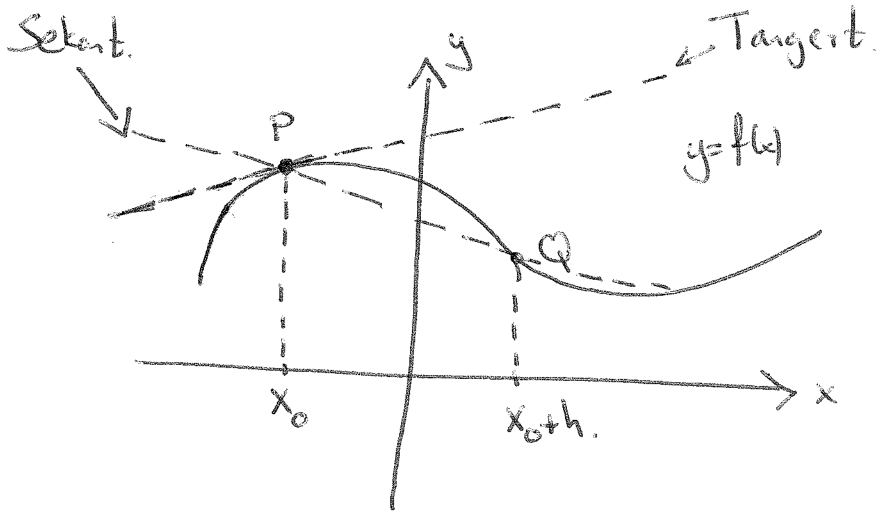
Föreläsning 4

Tangenter till grafer.

Betrakta följande graf.



Vill hitta en ekvation för tangenten till $f(x)$ i punkten P.

Ekvationen för tangenten bestäms av dess lutning k, varvid vi kan få fram ett uttryck

$$y = kx + m.$$

för tangentens ekvation.

Betrakta nu sekanten, dvs den linje som går genom P och Q.

Vilken är sekantens lutning?

Jo, den är given av

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h - h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Om vi låter $h \to 0$ så kommer sekanten närma sig tangenten. Därför ges tangentens lutning i x_0 av

$$k = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Detta uttryck kallas för differenskvoten.

Enligt enpunktsformeln så kommer ekvationen för tangenten vara

$$y - f(x_0) = k(x - x_0)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$y = kx + \underbrace{f(x_0) - kx_0}_{m}$$

Ex:

Låt $f(x)=x^3$. Vad ges tangenten av i $x_0=2$. Vi börjar med att ta fram lutningen för tangenten.

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{8}+12h+6h^2+h^3-\cancel{8}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(12+6h+h^2)}{\cancel{h}} = 12$$

Eftersom $f(2)=8$ så ges tangentens ekvation av

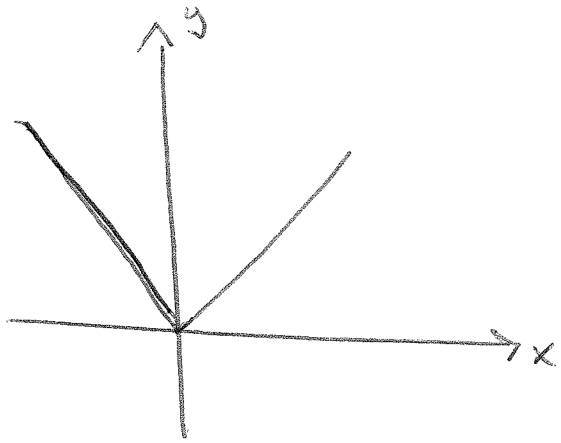
$$y-8 = 12(x-2)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y = 12x-24+8 = 12x-16.$$

Ex:

Betrakta $f(x)=|x|$. Dess graf är



Har f någon tangent i origo, dvs för $x_0=0$.
Låt oss kolla. Tangents lutning i $x_0=0$ är

$$k=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}.$$

Men

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=-1$$

och

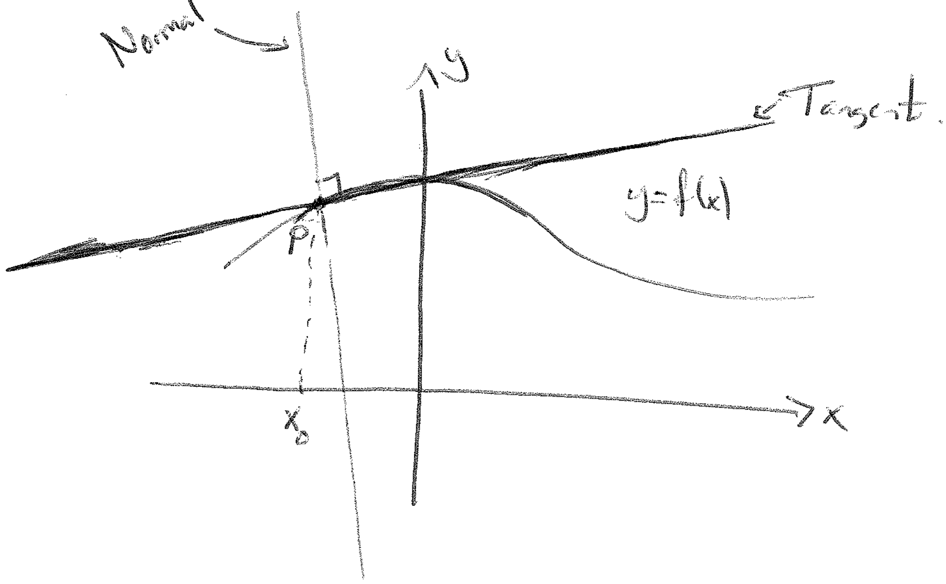
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=1$$

så

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} \text{ existerar inte!}$$

Därför har f ingen tangent i $x_0=0$.

Betrakta följande graf



Givet en tangent med lutning k_T så kan man hitta normalens lutning k_N. Normalen är den linje som skär tangenten vinkelrätt. Lutningen för normalen ges av

$$k_N \cdot k_T = -1$$

Ex:

Betrakta funktionen $f(x) = x^3$. Vi såg i ett annat exempel att tangentens ekvation i $(2,8)$ ges av

$$y = 12x - 16$$

Normalens lutning blir därför $k_N = -\frac{1}{12}$.
Ekvationen ges av

$$y - 8 = -\frac{1}{12}(x-2) \Leftrightarrow y = -\frac{x}{12} + \frac{1}{6} + 8 = -\frac{x}{12} + \frac{49}{6}.$$

Differenskvoten är väldigt viktig. Det är denna kvot som är så kallad derivata.

Def:

Låt $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ vara en funktion. Derivatan av f är en annan funktion f' given av differenskvoten:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

för alla x där gränsvärdet existerar. Där $f'(x)$ existerar så säger vi att f är differentierbar (eller deriverbar) i x.

Derivatan ger alltså tangentens lutning i en punkt x, och tangentens ekvation i x_0 ges av

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Vi har även annan notation för $y = f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = D_x f(x) = \frac{dy}{dx} = y' = D_x y$$

Ex:

Låt $r>0$ och betrakta $f(x)=x^r$. Vad är då $f'(x)$?
Vi har att

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^r-x^r}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^r}+k_{r-1}x^{r-1}h+\dots+k_1xh^{r-1}+h^r-\cancel{x^r}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(k_{r-1}x^{r-1}+k_{r-2}x^{r-2}h+\dots+k_1xh^{r-2}+h^{r-1})}{\cancel{h}}=$$

$$=k_{r-1}x^{r-1}$$

Frågan är vad k_{r-1} är. Den är given av binomialkoefficienten $\binom{r}{1}=\frac{r!}{(r-1)!\,1!}=r$.

Därför är $f'(x)=r\,x^{r-1}$.

Detta kan man även visa med induktion!

Ex:

Låt $f(x)=c$, där $c\in\mathbb{R}$. Så f är en konstant funktion. Vad är $f'(x)$? Vi har att

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{c-c}{h}=0.$$

Därför är $f'(x)=0$.

Ex:

Betrakta $f(x)=|x|$. Vi såg i tidigare exempel att f inte är deriverbar i $x=0$. Eftersom

$$f(x)=\begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x<0 \end{cases}$$

så är

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & ; x>0 \\ -1 & ; x<0 \end{cases} = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn}(x)$$

den så kallade signumfunktionen.

Ex:

Betrakta $f(x)=\frac{1}{x}$. Vad är $f'(x)$?

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{x(x+h)\cdot h}=-\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{x(x+h)\cancel{h}}=-\frac{1}{x^2}$$

Anm:

Man har flera notationer för $f'(p)$: $(y = f(x))$

$$f'(p) = y'(p) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=p} = \left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x=p} = D_x f(p) = D_x y(p).$$

Olika deriveringsregler

Först ett resultat som säger att en funktion kan inte hoppa om den kan deriveras där.

Sats:

Om f är deriverbar i x, då är f kontinuerlig i x.

Bevis:

Vi har att

$$\lim_{h\to 0} \left(f(x+h) - f(x)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h =$$

$$= f'(x) \cdot 0 = 0$$

Alltså är $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, så f är kontinuerlig.

$\square$

Nästa resultat säger att man kan derivera olika termer för sig och konstanter kan multipliceras efteråt.

Sats:

Om f, g är deriverbara och $k \in \mathbb{R}$, då är

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

och

$$(kf)'(x) = kf'(x).$$

Beviset bygger fullständigt på att

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

och

$$\lim_{x \to a} k f(x) = k \lim_{x \to a} f(x).$$

Anm:

Man kan även relativt lätt visa att

$$(f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_n)'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_n'(x)$$

Idén är att använda induktion och Satsen ovan!

Sats: (Produktregeln)

Om f och g är deriverbara så är

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Bevis:

$$(fg)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) \boxed{- f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)} - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\underbrace{g(x+h)}_{g(x)}}_{\text{ty } g \text{ är kont.}} + \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x)}_{g'(x) \cdot f(x)}$$

$$= f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$

Ex:

Kom ihåg att om $f(x) = x^2$ så är $f'(x) = 2x$.
Betrakta nu $f(x)$ som $x \cdot x$ och använd produktregeln för att hitta $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 \cdot x^0 \cdot x + x \cdot 1 \cdot x^0 = x + x = 2x.$$

Ex:

Betrakta $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^3+2)(x^{5/2} + 2x + 1)$.
Vad blir $f'(x)$? Produktregeln ger att

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x^3+2)(x^{5/2}+2x+1) + \sqrt{x}\Big(3x^2(x^{5/2}+2x+1) + (x^3+2)\left(\tfrac{5}{2}x^{3/2}+2\right)\Big)$$

Nu kan vi derivera produkter av funktioner men hur deriverar vi kvoter av funktioner; $\dfrac{f}{g}$.
Vi behöver först ett annat resultat.

Sats:

Antag att f är deriverbar och att $f(x) \neq 0$, då är

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

Bevis:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h}} \frac{1}{f(x)\underbrace{f(x+h)}_{\to f(x) \text{ ty } f \text{ kont.}}} =$$

$$\downarrow -f'(x)$$

$$= \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

$\square$

Sats: (Kvotregeln)

Antag att f och g är deriverbara, och att $g(x) \neq 0$.

Då är

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

Bevis:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) \underset{\text{Produktregeln}}{=} f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x) =$$

$$\underset{\text{Sats ovan}}{=} \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot -\frac{g'(x)}{(g(x))^2} \underset{\text{Liknämnigt}}{=} \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$\square$

Ex:

Låt $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^{3/2}}$. Låt oss derivera:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+x^{3/2}\right) - \left(1+\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+x^{3/2}\right)^2}$$

Ex:

Låt oss hitta tangenten i $x=1$ för $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^{3/2}}$ i föregående exempel. Vi har att

$$f(1) = \frac{1+\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1^{3/2}} = \frac{2}{2} = \underline{1}$$

och

$$f'(1) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1}}\left(\sqrt{1}+1^{3/2}\right) - \left(1+\sqrt{1}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{3}{2}\sqrt{1}\right)}{\left(\sqrt{1}+1^{3/2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1+1) - (1+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)}{(1+1)^2} =$$

$$= \frac{1-2\cdot 2}{2^2} = \frac{-3}{4}$$

Så tangentens ekvation ges av (enpunktsformel):

$$y-1 = -\frac{3}{4}(x-1) \iff y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} + 1 = \underline{\underline{-\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}}}$$